## गणित शिक्षण में संख्या रेखा की अवधारणा

# कभी चटपटी, कभी अटपटी

संदीप त्रिपाठी

गणित में विद्यार्थियों को संख्याओं का शिक्षण आमतौर पर अमूर्त प्रतीकों के रूप में करवाया जाता है। इससे विद्यार्थी प्रक्रिया तो सीख लेते हैं लेकिन उन्हें संख्याओं की समझ बनाने में कठिनाई महसूस होती है। प्रस्तुत लेख में लेखक संख्या रेखा पर अपने काम के अनुभव से बताते हैं कि यदि विद्यार्थी स्वयं मूलभूत संक्रियाओं पर काम करके सीखें तो वे न सिर्फ़ गणितीय अवधारणाओं को बेहतर समझ पाते हैं वरन् समझा भी पाते हैं। गणित की कक्षा में बच्चों के स्वयं सीखने के मौक़े बनाने पर उनमें विषय के प्रति संकोच और डर भी कम होता है। सं.

## पृष्ठभूमि

प्रारम्भिक स्तर पर संख्या रेखा की अवधारणा गणित शिक्षण का एक बहुत महत्त्वपूर्ण भाग है। इसके द्वारा बच्चे संख्या क्रम और परिमाण का निरूपण करना और साथ में संख्या व उनपर होने वाली संक्रियाएँ सीखते हैं। गणित की अवधारणाओं के अमूर्त निरूपण में संख्या रेखा की समझ बहुत महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है। यद्यपि कुछ छोटे बच्चों को इन्हें समझने में कठिनाई हो सकती है, किन्तु प्रारम्भिक स्तर पर संख्या रेखा की अवधारणा भविष्य की कठिनाइयों को रोकने, और गणित की अवधारणाओं व बच्चों के ठोस अनुभवों के साथ सम्बन्ध बनाने में मददगार होती है (गियरी, 1993)। वैसे देखा जाए तो संख्या रेखा हमारे रोज़मर्रा के जीवन का एक हिस्सा भी है। हम अनेक पैमानों को पढ़ते समय, यथा– मापन के टेप, थर्मामीटर, वज़न नापने की मशीन, आदि के रूप में इसका उपयोग करते हैं।

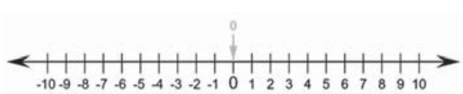
संख्या रेखा का उपयोग विभिन्न गणितीय अवधारणाओं और प्रक्रियाओं के बारे में छात्रों की अवधारणात्मक समझ को जानने के लिए किया जाता है, जैसे कि संख्या अनुक्रमण गतिविधियाँ (विगेल, 1998), गणितीय संक्रियाओं को दिखाने की एक ठोस विधि के रूप में (डेविस और सिम्ट, 2003), परिमेय संख्याओं की निरन्तरता की कल्पना कर पाने में सहायता (डायन्स, 1964), आदि।

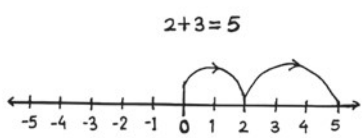
यद्यपि संख्या रेखा छात्रों को गणित की समझ में सहायता कर सकती है, किन्तु कई शोधों से यह संकेत भी मिलता है कि कुछ प्राथमिक छात्रों को संख्या रेखा के उपयोग में कठिनाई का अनुभव होता है (डाइज़मैन एंड लोरी, 2006)। फिर भी कह सकते हैं कि प्राथमिक स्तर पर यह गणित शिक्षण में विद्यार्थियों की समझ को बढ़ाने में मदद करने के साथ-साथ उनका गणित से लगाव भी बढ़ाती है। सामान्यत: शालाओं में विद्यार्थियों को संख्याओं का शिक्षण अमूर्त प्रतीकों के रूप में करवाया जाता है। ऐसे में विद्यार्थी गणितीय प्रक्रिया तो सीख लेते हैं लेकिन उससे सम्बन्धित समझ बनाने में उन्हें बहुत कठिनाई महसूस होती है।

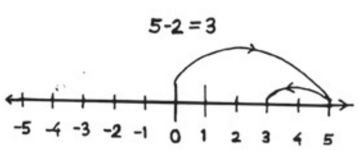
अपने प्रयोग के दौरान मैंने अनुभव किया कि जब बच्चे संख्या रेखा पर स्वयं मूलभूत गणितीय संक्रियाओं का अभ्यास कर रहे थे, तो उनके पास एक ज़्यादा स्पष्ट अवधारणा थी। वे ज़्यादा अच्छे-से गणितीय अवधारणा को न केवल समझ पा रहे थे, बल्कि सहपाठियों के साथ व्यक्त भी कर पा रहे थे। इसके साथ यह भी अनुभव हुआ कि बच्चों के मन में गणित के सवालों के हल को लेकर जो एक झिझक या उत्तर पर भरोसे की कमी एवं डर रहता है, कहीं-न-कहीं जब उन्होंने संख्या रेखा पर स्वयं प्रयोग करके देखे, तो यह काफ़ी हद तक दूर हुआ। साथ ही उन्हें इस तरह से गणित करना ज़्यादा रोमांचक लगा और गणित में उनका ज़्यादा अच्छा जुड़ाव सम्भव हो सका।

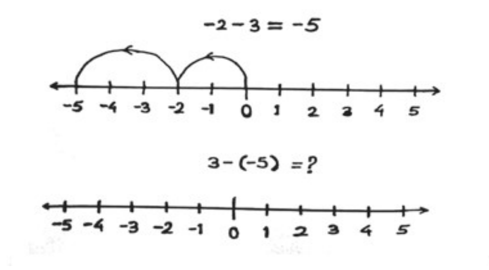
## बच्चों के साथ अनुभव

संख्या रेखा पर बच्चों की समझ को जानने के लिए मैंने लगभग 40 बच्चों के साथ कुछ प्रयोग किए। यह सभी शासकीय ज्ञानोदय विद्यालय नर्मदापुरम के कक्षा छठवीं के बच्चे थे। इनकी उम्र 11 से 13 वर्ष के बीच थी। सबसे पहले चित्र 1 अनुसार संख्या रेखा बनाई जिसमें दाहिने हाथ की तरफ़ धनात्मक और बाईं तरफ़ ऋणात्मक संख्याओं को अंकित किया। मैंने बच्चों को संख्या रेखा की आधारभूत जानकारी दी और उसपर काम कैसे किया जाता है, यह बताया।




चित्र 1

यह सब बताने के बाद मैंने पहला प्रश्न पूछा, "हम इस संख्या रेखा पर [2 + 3] कैसे करेंगे।"

एक बच्चा बोलने लगा, "सर, पहले शून्य से धनात्मक तरफ़ 2 क़दम चलेंगे फिर 2 के बाद 3 क़दम पुनः उसी दिशा में चलेंगे, इस प्रकार उत्तर 5 आएगा।"

पुनः मैंने अगला सवाल किया, "[5 – 2], इसे कैसे करेंगे।" अधिकांश बच्चे सोचने लगे, लेकिन उनमें से कुछ बच्चों ने ध्यान से प्रश्न को देखा और कहने लगे, "सर, पहले हम धनात्मक 5 की ओर चलेंगे और क्योंकि अगली संख्या ऋणात्मक है अतः हम अब ऋणात्मक संख्याओं की ओर 2 क़दम चलेंगे, इस प्रकार उत्तर 3 आएगा।"

मैंने बच्चों का हौसला बढ़ाया और उन्हें उसी प्रकार दो धनात्मक संख्याओं का जोड़, धनात्मक संख्या में से धनात्मक संख्या घटाना आदि सवाल दिए। अब बच्चे बहुत आसानी से उन सवालों को हल करने लगे।

फिर अगला सवाल, "[–2–3] कैसे करेंगे।" चूँकि बच्चे थोड़ा अभ्यास कर चुके थे तत्काल एक बच्चा आया और वह करके दिखाने लगा। 0 से ऋण तरफ़ पहले वह 2 क़दम चला उसके पश्चात कहने लगा, "अगली संख्या भी ऋणात्मक है अतः पुनः ऋण की ओर आगे बढ़ेंगे", और वह उसी दिशा में 3 क़दम और चला। इस प्रकार उसने बताया कि उत्तर –5 आएगा।

सभी ने तालियों से उसका उत्साहवर्धन किया। इस प्रकार हमने और भी बहुत सारे अभ्यास किए जिनमें सभी बच्चे शामिल हुए।

अब मैंने सवाल किया, "हम [3] – [–5] कैसे करेंगे।" चूँकि बच्चे अब अभ्यस्त हो चुके थे अतः उसमें एक बच्चा आया और वह पहले धनात्मक ओर तीन क़दम चला और वहाँ से वापस ऋणात्मक ओर 5 क़दम चला इस प्रकार उसने उत्तर बताया 2।

इस उत्तर को बताते समय उस बच्चे के चेहरे पर कुछ शंका के बादल मँडरा रहे थे। कक्षा में बैठे हुए बाक़ी बच्चे भी पूर्ण रूप से आश्वस्त नहीं थे, और वह आपस में कुछ खुसर-पुसर कर रहे थे।

मैं सब घटनाएँ देख रहा था। मैंने प्रश्न किया, "क्या हमारा उत्तर 2 सही है?" बच्चे पसोपेश में थे, क्या उत्तर दें, हाँ या नहीं। मैंने वापस फिर वही सवाल किया तो उसमें एक बच्ची कहने लगी, "नहीं सर, इसका उत्तर तो 8 आएगा।"

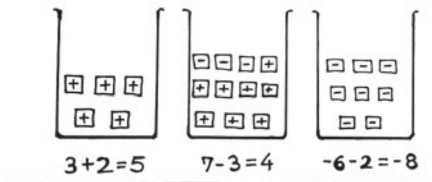
मैंने कहा, "आप संख्या रेखा पर आकर बता सकती हो!" वह भी एक उलझन में थी किन्तु कुछ सोचते हुए हुए वह आई और उसने भी वही प्रक्रिया अपनाई। पहले वह संख्या रेखा पर धनात्मक ओर 3 क़दम चली फिर ऋणात्मक चिह्न देखकर उसने अपना मुँह ऋणात्मक संख्याओं की ओर किया।

लेकिन यहाँ उसके सामने एक और ऋण संख्या आ गई। वह सोचने लगी क्या करना है। सभी बच्चे बड़े ध्यान से उसकी तरफ़ देख रहे थे। मैं फिर पूछने लगा, "अब क्या करेंगे?" लेकिन बच्चे वहाँ अटक गए क्योंकि यहाँ दो बार ऋण चिह्न का उपयोग हो रहा था।

प्रक्रिया के रूप में या जो उन्होंने पूर्व में पढ़ा हुआ था, उसके अनुसार तो उनका उत्तर 8 आ रहा था, लेकिन जो अभी हमने संख्या रेखा के बारे में पढ़ा उसके अनुसार उनका उत्तर 2 आ रहा था।

यह प्रश्न मैंने बच्चों के ऊपर छोड़ दिया कि आप लोग सोचकर आइए कि इसका सही उत्तर क्या हो सकता है। हमारी यह श्रृंखला चलती रही।

मैं देख रहा था कि संख्या रेखा गतिविधि में सहभागिता तो लगभग सभी बच्चों की थी लेकिन शायद वे अभी भी अवधारणा को नहीं समझ पा रहे थे। कुछ बच्चे अभी भी अपने साथियों की नक़ल करते हुए उत्तर देने का प्रयास कर रहे थे। इस समस्या को देखते हुए मैंने एक नया प्रयोग करना प्रारम्भ किया।




चित्र 2

मैंने एक गत्ते के बहुत सारे छोटे-छोटे वर्गाकार टुकड़े कर लिए और चित्र अनुसार उनपर धन और ऋण के चिह्न लगा दिए।

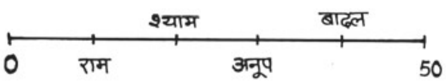
फिर वही क्रिया मैंने प्रारम्भ की और पूछा, "यदि हमें 3 + 2 जोड़ना है तो उत्तर क्या होगा?" बच्चों ने तत्काल 3 धन चिह्न वाले और 2 धन चिह्न वाले टुकड़े उठा लिए और बताया, "सर, उत्तर 5 आएगा।"

फिर अगला प्रश्न "7 में से ऋण 3 करने पर उत्तर क्या आएगा।" सबसे पहले उन्होंने 7 धन चिह्न वाले टुकड़े लिए और फिर 3 ऋण चिह्न वाले टुकड़े लिए। ऋण और धन चिह्न वाले टुकड़ों की जोड़ी बनाने के बाद शेष चार धन चिह्न वाले टुकड़े बचे। उन्होंने बताया, "सर, उत्तर 4 आएगा।"

इस प्रकार, अन्य संख्याओं पर भी हमने प्रयोग किए और मुझे लगा कि संख्या रेखा की अवधारणा को स्पष्ट करने में यह प्रयोग ज़्यादा प्रभावी सिद्ध हो रहा है। इन दोनों गतिविधियों के माध्यम से बच्चे अवधारणात्मक स्तर पर

ज़्यादा आसानी से गणितीय संक्रियाएँ सीखे, और निश्चित रूप से यह प्रयोग पहले वाले की तुलना में बच्चों के लिए ज़्यादा आसान और असरदार रहा। दूसरे प्रयोग के पश्चात संख्या रेखा के बारे में उनकी समझ पहले प्रयोग की अपेक्षा ज़्यादा अच्छी हुई।

चित्र 3 अनुसार मैंने पुनः एक चित्र बनाया और यहाँ पर बच्चों से प्रश्न किया, "बताओ, बादल की निकटतम संख्या क्या होगी?"




चित्र 3

बच्चों ने चित्र को ध्यान से देखा और कहने लगे, "सर, 50 होगी।"

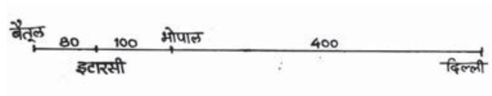
मैंने फिर कन्फ़र्म किया, "क्या सभी सहमत हो?" अधिकतर बच्चे सहमति से ज़ोर-ज़ोर से बोलने लगे, "हाँ सर, 50 होगी।"

अब मैंने पूछा, "राम की निकटतम संख्या क्या हो सकती है?" वे कहने लगे, "सर, 0 होगी।" मैंने कहा, "यह शून्य के नज़दीक तो है लेकिन शून्य तो नहीं है, वह संख्या क्या हो सकती है?" बच्चे अनुमान लगाने लगे और उनमें से कुछ ने कहा, "सर, यह 10 के आसपास हो सकती है।"

गतिविधि को आगे बढ़ाते हुए मैंने अगला प्रश्न किया, "अब बताओ, श्याम के पास की संख्या क्या हो सकती है?" बच्चे कहने लगे, "सर, यह 10 से ज़्यादा होगी और 20 के आसपास हो सकती है।" क्रम को आगे बढ़ाते हुए फिर मैंने अगला सवाल दागा, "अनूप के नज़दीक की संख्या क्या होगी?" बच्चे सोच में पड़ गए क्योंकि अनूप, श्याम के तो पास था लेकिन बादल से भी ज़्यादा दूर नहीं था। वे आपस में चर्चा करते रहे, कभी 30 बोलते कभी 35। अन्तिम रूप से उन्होंने निष्कर्ष निकाला, "सर, यह 30 होनी चाहिए, क्योंकि अनूप, श्याम एवं बादल के लगभग बीच में था।"

अगला प्रश्न किया, "बताइए, बादल की स्थिति अनूप और 50 के बीच में है तो हमारा सम्भावित उत्तर क्या हो सकता है?" बच्चे अनुमान लगाते रहे और फिर उन्होंने जवाब दिया, "यह 40 के लगभग हो सकती है।"

क्योंकि अब बच्चों को बहुत मज़ा आ रहा था और वह पूरी तरीक़े से इसमें रम चुके थे। मैंने उन्हें एक अगला चित्र दिखाया जिसके बारे में कोई जानकारी नहीं दी।




चित्र 4

तख़्ते पर उससे सम्बन्धित एक प्रश्न लिख दिया और बच्चों से कहा, "अब बताइए, बैतूल से दिल्ली के बीच की दूरी क्या होगी?"

एक बच्चे ने तत्काल उत्तर दिया, "सर, 400 किलोमीटर होगी।" कुछ बच्चे फिर से सोचने लगे और कुछ बच्चे दबे स्वर में और कुछ बोलना चाह रहे थे। मैंने उनसे कहा, "फिर से सोचो और बताओ।" बच्चों ने फिर सोचा, कुछ जोड़ किया, और बताया, "सर, बैतूल से दिल्ली के बीच की दूरी 580 किलोमीटर होगी।"

उस बच्चे ने जिसने उत्तर 400 किलोमीटर बताया था, मैंने पूछा, "उत्तर क्या होना चाहिए।" वह बोलने लगा, "580 किलोमीटर होगा।" मैंने पूछा, "फिर आपने क्यों बोला कि 400 किलोमीटर होगा?", वह कहने लगा, "सर, मैंने ध्यान नहीं दिया और जल्दबाज़ी में बोल दिया।"

मेरा अगला सवाल था, "बैतूल से दिल्ली के बीच की दूरी के लिए हमें क्या करना चाहिए या क्या करना होता है?" उसने बताया, "सर, पहले बैतूल से इटारसी के बीच की दूरी, इटारसी से भोपाल की और फिर भोपाल से दिल्ली के बीच की दूरियाँ, इन सभी को जब हम आपस में जोड़

देंगे तब जाकर बैतूल से दिल्ली के बीच की दूरी निकल आएगी।"

इस प्रकार कभी-कभी जब बच्चे ध्यान नहीं दे पाते हैं या थोड़ी जल्दबाज़ी करते हैं उस स्थिति में भी संख्या रेखा समझने में थोड़ी कठिनाई महसूस होती है।

सत्र के पश्चात कुछ चीज़ों से सम्बन्धित कुछ बातें मेरे मन में आईं उनका विवरण मैं नीचे दे रहा हूँ। पूरी प्रक्रिया के दौरान हमें दो समूहों में बच्चे देखने को मिले। पहला समूह उन बच्चों का था जिन्होंने पहली बार में ही एकदम सही उत्तर दे दिए थे। साथ में इसी समूह में कुछ ऐसे बच्चे भी शामिल थे जिन्होंने थोड़ा प्रयास किया और सही उत्तर बता दिया। और दूसरा समूह ऐसे बच्चों का था जिन्होंने या तो बहुत बाद में उत्तर दिया या वे समझ ही नहीं पाए और दोस्तों की नक़ल कर ही उत्तर बताते रहे।

## सफल विद्यार्थियों ने संख्या रेखा का प्रयोग किस प्रकार किया

सफल छात्रों ने संख्या रेखा पर मापन पहलू, विशेष रूप से दूरी, संख्याओं की निकटता या सन्दर्भ बिन्दुओं से सम्बन्धित रणनीतियों का उपयोग किया। उदाहरण के लिए, चित्र 3 के जवाब में, सफल छात्रों ने अपने उत्तरों की व्याख्या करते समय, संख्या रेखा के मापन पहलू पर प्रकाश डाला।

उन्होंने 0 और 50 के बीच की दूरी को देखा और तर्क दिया कि क्योंकि बादल की जगह अनूप और 50 के बीच में है इसलिए बादल का मान 40 के आसपास होना चाहिए। इसी प्रकार राम, श्याम एवं अनूप आदि के लिए भी वे तर्क आधारित अनुमान लगाते रहे।

छात्रों ने जो तरीक़ा अपनाया उसमें उन्होंने दूरी पर भी विचार किया। उदाहरण के लिए, कुछ छात्रों ने समाधान के रूप में बादल की पहचान करने से पहले अन्य व्यक्तियों की स्थिति का अनुमान लगाया। सफल छात्र समझते हैं कि संख्या रेखा एक मापन मॉडल है और इसकी व्याख्या करने के लिए अंकों के बीच की दूरी पर ध्यान देने की आवश्यकता है।

## असफल विद्यार्थियों ने संख्या रेखा का प्रयोग किस प्रकार किया

हमारी गतिविधि में लिए गए 40 छात्रों में से कम-से-कम 15% छात्र संख्या रेखा गतिविधि पर अपेक्षित रूप से सफल नहीं हो पाए। इन छात्रों ने सवाल को हल करने, या उस हल की व्याख्या के दौरान (स्पष्टीकरण त्रुटियाँ) ग़लतियाँ कीं। इनमें समाधान की त्रुटियाँ आम थीं। उनमें दूरी, स्थिति, गिनती या आरेख को ग़लत तरीक़े से पढ़ने में कठिनाइयाँ शामिल थीं। उदाहरण के लिए, चित्र 3 में दिखाए गए आइटम के लिए, असफल छात्रों की एक सामान्य प्रतिक्रिया अज्ञात मूल्य की पहचान करने के लिए केवल गिनती को नियोजित करना थी। उदाहरण के लिए, छात्र ने गिने जाने वाले अंकों के बीच की दूरी के महत्त्व के बारे में कोई जागरूकता नहीं दिखाई।

## मैंने क्या सीखा

अपने उत्तर का स्पष्टीकरण छात्रों और उनकी सोच को परिष्कृत करने में मदद कर सकता है। इसके द्वारा वे अवधारणात्मक रूप से ज़्यादा स्पष्टता हासिल कर सकते हैं। इन गतिविधियों के दौरान कई छात्रों को लगा कि उन्होंने प्रश्न को ज़ोर से पढ़ने के बाद सही उत्तर दिया था या वह ज़ोर से पढ़ने के बाद ही प्रश्न की भाषा को समझ पाए थे। ज़ोर से पढ़ने से छात्रों को प्रश्न की सारी जानकारी को समझने में मदद मिली।

उदाहरण के लिए, चित्र 4 में छात्रों को संख्या रेखा पर स्थिति की पहचान करने और फिर गणना करने की आवश्यकता है। कई छात्रों ने अपने उत्तर के रूप में 400 किलोमीटर का चयन करते हुए इस प्रश्न को ग़लत तरीक़े से

पढ़ा। जब उनसे प्रश्न को ज़ोर से पढ़ने और अपने उत्तर की व्याख्या करने के लिए कहा गया, तो उन्हें अपनी त्रुटि का एहसास हुआ और उन्होंने अपने उत्तर को 580 किलोमीटर के सही विकल्प में बदल दिया।

स्पष्टीकरण, छात्रों की स्वयं को सही करने की क्षमता में वृद्धि करने के साथ ही स्वयं के प्रदर्शन में सुधार के लिए एक महत्त्वपूर्ण अवसर प्रदान करता है। सफल छात्रों ने मापन मॉडल के रूप में संख्या रेखा पर ध्यान केन्द्रित किया और दूरी, संख्याओं की निकटता, या सन्दर्भ बिन्दुओं से सम्बन्धित रणनीतियों को नियोजित किया। इसके विपरीत, असफल छात्रों ने ऐसी रणनीतियों का उपयोग किया जो गिनती, प्रश्न को ग़लत तरीक़े से पढ़ने या अनुमान लगाने पर केन्द्रित थीं। स्पष्ट है कि कई छात्रों को संख्या रेखाओं के ज्ञान को विकसित करने के लिए सहायता की आवश्यकता होती है। इस सबके निहितार्थ क्या हैं? हम इस समझ के आधार पर कक्षा शिक्षण के दौरान क्या रणनीति अपना सकते हैं? छात्रों को उनकी सोच को समझाने के लिए कब और कैसे मौक़े दिए जा सकते हैं। व्याख्या करने से छात्रों को समीक्षा करने और, यदि आवश्यक हो, उनकी गणितीय सोच को परिष्कृत करने का अवसर मिलता है। स्पष्टीकरण के दौरान, कुछ छात्र अचानक एक ऐसे क्षण का अनुभव करते हैं जहाँ उन्हें महसूस होता है कि उन्होंने कहाँ ग़लती की और वे उस ग़लती को आसानी से ठीक कर सकते हैं।

## सन्दर्भ


1. Diezmann, C. M. & Lowrie, T. (2006). Primary students' knowledge of and errors on number lines. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds), *Identities, cultures, and learning spaces* (Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia). (Vol. 1, pp. 171–178). Adelaide: MERGA.
2. Witzel, B., Mercer, C. D., & Miller, M. D. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research and Practice*, 18, 121–131.
3. Geary, D. C. (1993). Mathematical disabilities: Cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin*, 114, 345–362.
4. Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Byrd-Craven, J. (2008). Development of number line representations in children with mathematical learning disability. *Developmental Neuropsychology*, 33, 277–299.


---


संदीप त्रिपाठी 1998 से मध्य प्रदेश के ग्रामीण क्षेत्रों में अध्यापन का कार्य कर रहे हैं। इन्होंने गणित विषय में स्नातकोत्तर के साथ ही बी एड किया है। गणित के अलावा आपने इतिहास एवं समाजशास्त्र में भी स्नातकोत्तर किया है। इनके *चकमक, संदर्भ, स्रोत, पलाश* जैसी शिक्षा से जुड़ी पत्रिकाओं में लेख प्रकाशित हुए हैं। उनके द्वारा गणित और भाषा विषय में शैक्षिक अनुसन्धान के कार्य भी किए जाते हैं। शाहपुर विकासखण्ड में कार्यरत स्वयंसेवी संस्था एकलव्य के साथ मिलकर प्रारम्भिक शिक्षा में सुधार हेतु लम्बे समय तक कार्य किया है। इनकी चार पुस्तकें- *सफलता की सोच, छोटे अनुभव बड़ी जीत, मैं और मेरी दुनिया* और *डिजिटल मार्केटिंग हैक्स* नाम से प्रकाशित हुई हैं।

सम्पर्क : sandip26tripati@gmail.com